MINISTERE DE L'ENVIRONNEMENT
ET DU CADRE DE VIE

E.I. T.P.E. 1981

(2)

COMPOSITION DE MATHEMATIQUES

(temps accordé : 4 heures)

I

Soit dans le plan affine euclidien $\mathbb{R}^2$ rapporté à un repère orthonormé xOz, l'ensemble $\mathcal{C}$ des points M dont les coordonnées (x,z) vérifient l'équation :

$$z^2 = x^2(x + 1)$$

1°) Montrer que l'on peut obtenir une représentation paramétrique de $\mathcal{C}$ en étudiant son intersection avec les droites passant par l'origine.

2°) Etudier et construire la courbe $\mathcal{C}$ (abscisse x, ordonnée z).

3°) Soit un réel $x_o > -1$. On considère la suite $\{x_n\}_{n \geq o}$ définie par récurrence à partir de x_o telle que x_{n+1} soit l'abscisse du point d'intersection de Ox avec la normale à $\mathcal{C}$ au point de $\mathcal{C}$ d'abscisse x_n et d'ordonnée positive.

a) Montrer que cette suite obéit à la loi de récurrence :

$$x_{n+1} = \frac{3x^2_n + 4x_n}{2}$$

étudier cette suite.

b) dans le cas où $x_o \neq o$ et où la suite converge vers une limite finie ℓ, que peut-on dire de la série de terme général $u_n = (x_n - \ell)$?

4°) Calculer l'aire de la surface intérieure à $\mathcal{C}$, dans le demi-plan $x < o$

5°) Donner la valeur de la courbure de $\mathcal{C}$ en tout point. Quels sont les cercles de courbure de $\mathcal{C}$ en O et en A(-1,o) ?

6°) Trouver une loi de mouvement sur $\mathcal{C}$ telle que l'hodographe relatif à O (c'est-à-dire l'ensemble des points décrits par l'extrémité d'un vecteur équipolent au vecteur vitesse et d'origine O), soit lui-même contenu dans $\mathcal{C}$.

.../...

II

On se place à présent, et pour toute la suite du problème, dans l'espace affine euclidien $\mathbb{R}^3$ rapporté à un repère orthonormé direct Oxyz.
La courbe $\mathcal{C}$ du §I appartient au plan xOz.

1°) Soit Σ la surface obtenue en faisant tourner $\mathcal{C}$ autour de Ox, chaque point de $\mathcal{C}$ décrivant un cercle d'axe Ox. Trouver une équation cartésienne caractérisant l'ensemble des points de Σ ; on donnera également une représentation paramétrique de Σ.

2°) Calculer le volume intérieur à Σ dans le demi espace $x < o$.

3°) Ecrire une équation du plan tangent à Σ en tout point de $\mathcal{C}$ autre que O.

III

Soit $\mathcal{S}$ la surface de $\mathbb{R}^3$ ensemble des points dont les coordonnées x,y,z vérifient l'équation :

$$z(x+1) - xy^2 - x(x+1)\sqrt{x+1} = 0$$

1°) Vérifier que la surface $\mathcal{S}^*$ obtenue en privant $\mathcal{S}$ d'une droite D, admet une équation de la forme $z = f(x,y)$
et que sur $\mathcal{S}^*$, f admet des dérivées partielles en x et y continues de tous ordres.

2°) a) Quelle est la nature des courbes intersections de $\mathcal{S}$ avec les plans paralléles à yOz ? (discuter suivant la position de ces plans)

b) Quelle est l'intersection de $\mathcal{S}$ et du plan xOz ?

3°) Montrer qu'en utilisant les paramètres $t = \frac{z}{x}$ et $u = \sqrt{x+1}$ on obtient une représentation paramétrique admissible d'une portion de la nappe $\mathcal{S}$
Par quelle transformation simple en déduit-on le reste de $\mathcal{S}$?

4°) a) Ecrire une équation du plan tangent à $\mathcal{S}^*$ en tout point.

b) Comparer les plans tangents à $\mathcal{S}^*$ le long de la courbe trouvée en III 2°) b) à ceux trouvés en II 3°). Qu'en déduit-on pour $\mathcal{S}$ et Σ ?

c) Peut-on définir un plan tangent à $\mathcal{S}$ aux points de D ?

5°) a) Donner sous la forme d'une relation entre t et u l'équation des arcs de $\mathcal{S}$ le long desquels la tangente reste orthogonale à la direction (5,0,4).

b) Donner une représentation paramétrique de celui de ces arcs, Γ, qui passe par le point B de coordonnées (3,0,6).

.../...

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail